

MDT: 336.764.2

klíčová slova: opce – bariérová opce – replikační metody – dynamická a statická replikace – chyba replikace

# Aplikace replikačních metod při ocenění a zajištění bariérových opcí

Tomáš TICHÝ\*

## 1. Úvod

Na moderních finančních trzích dochází k redistribuci rizika mezi jednotlivými subjekty. Ty, které se rizika chtějí vzdát, ho přesouvají na subjekty, které jsou ochotny ho akceptovat. Děje se tak pomocí různých instrumentů, jako jsou kontrakty futures nebo opce. Právě využití opcí umožňuje snížit (odstranit) riziko jednostranného výkyvu cen při současném zachování možnosti profitovat z vývoje příznivého. Naopak pro subjekty, které riziko přijímají, mohou opce při nepříznivém vývoji znamenat takřka neomezené nebezpečí ztráty – což implikuje požadavek na řízení jejich rizika. Základním požadavkem pro efektivní řízení rizika opcí je především jejich správné **ocene-ní** a následná možnost **hedgingu**. Účelem hedgingu může být odstranění rizika celkové (*perfect hedge*) nebo pouze částečné (*quantile hedging, shortfall hedging*).

Metodou, kterou lze využít jak při oceňování, tak při zajišťování (hedgingu), je metoda **replikace výplatní funkce** opce. Opční replikace představuje sama o sobě jednu z nejpodnětnějších myšlenek a jeden z nejzajímavějších přístupů k modernímu oceňování a zajišťování derivátů. Z časového hlediska existují dva základní pohledy na replikaci opční výplaty: **dynamická replikace** a **statická replikace**.

U dynamické replikace se vychází z teoretických závěrů Blacka a Scholese (1973) – opce na akcii se v jakémkoliv okamžiku chová jako vážené portfolio  $H$  rizikového (podkladového) aktiva  $S$  a bezrizikového dluhopisu s nulovým kuponem  $B$ . Základními předpoklady této metody jsou: existence dokonalých trhů, možnost spojitého obchodování a nemožnost arbitráže.

Jinou metodou, kterou lze využít obzvláště pro replikaci a zajištění složitějších – exotických – opcí, je statická replikace. Účelem této metody je najít takové portfolio  $II$ , které by obsahovalo **konečný** počet obyčejných (*plain vanilla*), běžně obchodovatelných opcí, jejichž množství v portfoliu by po celou dobu životnosti zůstalo neměnné a přitom by umožňovalo replikovat vý-

\* VŠB-TU Ostrava (tomas.tichy@vsb.cz)

Částečně prezentováno na workshopu EU MOptFin – The technology of asset and liability modelling, Semmering, Austria, 2003. Článek vznikl rovněž za podpory grantu GA ČR 402/04/1357.

platu opce. Konkrétně v případě bariérových opcí se jedná o replikaci v době zralosti a/nebo na bariéře  $U$  (tj. pro  $S = U$ ). Metoda částečně připouští porušení předpokladu dokonalých trhů (spojitost obchodování), vyžaduje však existenci veřejně obchodovatelných opcí s nekonečně mnoha životnostmi, případně i s nekonečně mnoha realizačními cenami.

Replikací se obecně myslí vytvoření replikačního portfolia, které by mělo mít po celé cílové období stejnou hodnotu jako replikované aktivum. S tímto portfoliem bude spojen stejný očekávaný výnos, ale i stejné riziko. Oproti tomu při vytvoření zajištěného (hedgingového) portfolia je cílem doplnit zajišťované aktivum tak, aby bylo odstraněno riziko a toto portfolio přinášelo bezrizikový výnos. Toho lze dosáhnout například spojením krátké pozice v replikovaném aktivu a dlouhé pozice v replikačním portfoliu. Takto lze dosáhnout nulové výsledné pozice – za nemožnosti arbitráže přinášející při nulovém riziku nulový výnos.

Cílem tohoto článku je zejména přispět k vyjasnění aktuální problematiky řízení rizika derivátu. Z tohoto důvodu jsou nejdříve popsány výše uvedené přístupy k opční replikaci a dále je ukázána jejich efektivnost na jednoduchém případě diskrétně pojaté replikace bariérové opce (*up-and-out call*). Pro názornost je předpokládán podkladovým aktivem opce akcie (akciový index). Při závěrečném srovnání je rovněž uvažován vliv transakčních nákladů.

Postup je následující. Nejdříve je stručně definován pojem opce a bariérová opce s důrazem na konkrétní typ – reverzní bariérovou opci. Tato opce byla vybrána vzhledem ke svým specifickým vlastnostem, jako je např. výrazná nespojitost při dosažení bariéry. Právě na této bariérové opci budou dále ověřovány replikační metody. Předmětem tohoto článku jsou jak diskrétně, tak spojitě sledované konstantní bariéry.

V navazujících kapitolách jsou postupně popsány obě jmenované replikační metody. Dynamická replikace je popsána obecně, statická pak vzhledem ke své specifčnosti s aplikací na bariérových opcích.

Druhá část článku je věnována především potenciální chybě replikace a jejím zdrojům. Z didaktických důvodů je zvolena konkrétní bariérová opce. Dále jsou objasněny klady a zápory jak dynamické, tak statické strategie. Pro posouzení replikace bariérových opcí při aplikaci na opce s podkladovým aktivem – indexy světových kapitálových trhů – viz Tichý (2003) a Tichý (2004).

## 2. Bariérové opce

Opce (finanční opce) je aktivum, které svému vlastníkovi dává právo, avšak ne závazek „směnit“<sup>1</sup> stanovené finanční aktivum, tzv. **podkladové aktivum**,  $S$ , v předem určeném čase (období) za dohodnutou částku, označovanou jako **realizační cena**, *exercise price*,  $X$ . Opce, která svému držiteli dává právo koupit, se označuje **kupní (call) opce**. Opce, která svému

<sup>1</sup> ve smyslu učinit s tímto aktivem obchod – podle typu opce buď koupit, nebo prodat

vlastníkovi poskytuje právo prodat podkladové aktivum, se označuje **prodejní (put) opce**.

Výplatní funkci kupních a prodejních opcí lze zapsat jako  $\Psi_{call} = (S_T - X)^+$ , resp.  $\Psi_{put} = (X - S_T)^+$ , přičemž  $(\cdot)^+ \equiv \max(\cdot; 0)$  a  $S_T$  je cena podkladového aktiva v době realizace ( $T$ ) opce. Z hlediska matematické analýzy jednodušším (a doposud častějším) případem opcí jsou takové opce, které umožňují realizaci (uplatnění) jen v konkrétní den – označovány jsou jako opce evropské. V následujícím textu proto bude pojmem „opce“ myšlena právě evropská kupní opce.

V zásadě lze rozlišit mnoho typů opcí s více či méně komplikovanými výplatními funkcemi.<sup>2</sup> V tomto příspěvku je pozornost soustředěna v první řadě na opce bariérové. Ty představují speciální případ tzv. **path dependent options** (PD-opcí), tj. opcí, jejichž výplata v okamžiku realizace je určitým způsobem závislá na vývoji ceny (sledované cestě) podkladového aktiva po dobu životnosti opce. Bariérové opce přitom představují slabou závislost na minulém vývoji – minulý vývoj ovlivňuje (ne)možnost uplatnění opce, avšak vlastní výplata je odvozena pouze od spotové ceny aktiva v okamžiku realizace.

Hlavním znakem bariérových opcí je existence bariéry, která (jak bylo naznačeno výše) ovlivňuje možnost uplatnění opce. V zásadě můžeme rozlišit  $2 \times 2$  základní typy bariérových opcí. Jedná se jednak o opce typu **knock-in** (opci lze uplatnit pouze v případě, že stanovená bariéra byla v průběhu životnosti dosažena) a dále opce typu **knock-out** (v případě dosažení bariéry opci uplatnit nelze). Dále se podle výchozího umístění bariéry hovoří o **up-and-out(in)** opcích,  $U > X$ , a **down-and-out(in)** opcích,  $X > L$ , kde  $U$  označuje horní (*upper*) bariéru a  $L$  dolní (*lower*) bariéru. V dalším textu bude standardně předpokládána jen existence horní bariéry  $U$ .

Konkrétní výplata opce závisí na vztahu ceny podkladového aktiva a realizační ceny v okamžiku  $T$  – viz *graf 1*. Pro analýzu bariérových opcí je důležitý rovněž důsledek **parity knock-out-in**. Budeme-li sledovat scénář vývoje  $S_3$  na grafu 1, je zřejmé, že knock-out opce existuje až po okamžik  $t$ . Naopak knock-in opce začíná právě zde „svou existencí“. Oproti tomu běžná opce bude existovat po celou dobu, tj. až po  $T$ , a její hodnota ( $V^{call}$ ) by měla odpovídat **součtu** hodnot knock-in ( $V^{up/in}$ ) a knock-out opce ( $V^{up/out}$ ) se stejnými realizačními cenami, životnostmi a bariérou:

$$V^{call}(S; T) = V^{up/out}(S, U; T) + V^{up/in}(S, U; T) \quad (1)$$

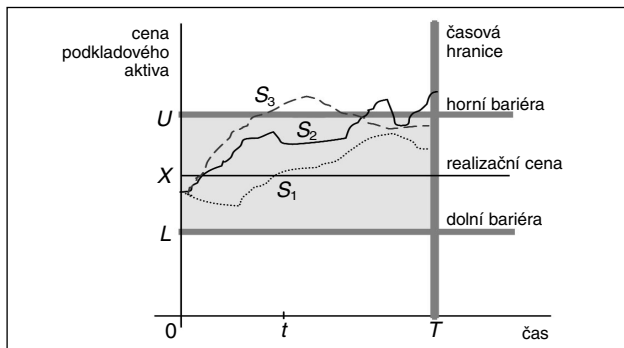
## 2.1 Digitální opce

Určitý přechod mezi jednoduchými opcemi (plain vanilla kupní nebo prodejní) a opcemi se složitější výplatou (např. opce bariérové) tvoří digitální opce, označované také jako binární. To, zda bude takováto opce v příslušném okamžiku uplatněna, sice závisí na vzájemném vztahu  $X$  a  $S_T$ , avšak

<sup>2</sup> Pro detailní popis základních typů jednotlivých opcí a jejich vlastností viz standardní literatura v závěrečném přehledu, příp. pro přehled oceňovacích formulí a formulí pro výpočet citlivostí (tzv. *greeks*) viz (Wystup, 2002).

GRAF 1 Vývoj ceny podkladového aktiva, scénáře  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ 

Knock-out kupní opce s horní bariérou  $U$ : v případě jejího dosažení přestane opce existovat, scénář  $S_3$ , čas  $t$ . Naopak příslušná knock-in opce „zahájí“ v tomto okamžiku svou existenci. Běžná kupní opce existuje po celou dobu životnosti, až po  $T$ . Scénář  $S_1$ : po celou dobu životnosti nedošlo k dosažení bariéry, knock-out opce bude uplatněna, knock-in opci však uplatnit nelze.



výše vlastní výplaty je na tomto vztahu nezávislá. Rozlišují se dva základní typy: (a) **cash-or-nothing**: výplata je tvořena určitou pevně stanovenou částkou; (b) **asset-or-nothing**: výplata je tvořena hodnotou podkladového aktiva, avšak bez odečtení realizační ceny. V tomto článku využijeme vlastností opcí prvního typu.

Jak vyplývá z výše uvedené definice, hodnota digitální kupní opce prvního typu odpovídá pravděpodobnosti, že cena podkladového aktiva v okamžiku  $T$  přesáhne výši realizační ceny  $X$ . Výplatní funkce se takto stává v bodě  $X$  nespojitou. Uvedenou opci lze chápat také jako zvláštní případ bariérové opce, jejíž bariéra je aktivní jen v okamžiku  $T$ .

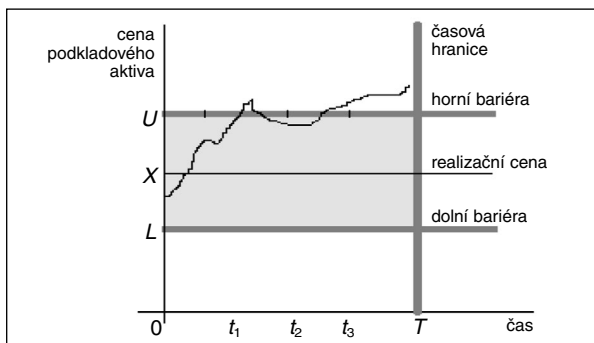
## 2.2 Reverzní bariérová kupní opce

Z hlediska oceňování a analýzy rizika je pravděpodobně nejzajímavějším případem jednoduchých bariérových opcí tzv. ITM up-and-out kupní opce, někdy také označovaná jako reverzní bariérová opce. Jedná se o kupní opci, která existuje při dosažení bariéry v penězích (*in-the-money*, ITM), tj. opce přestává existovat v případě dosažení horní bariéry, která leží výše než stanovená realizační cena,  $U > X$ . To má za následek nespojitost opční výplaty a významnou citlivost některých parametrů (*greeks*) na změnu vstupních dat.

Další důležité znaky bariérových opcí jsou spojeny s charakterem bariéry, jako je její typ (konstantní, v čase se měnící) a způsob sledování (diskrétně, spojitě). Hlavní rozdíl mezi diskrétním a spojitým charakterem bariéry je dán zejména vztahem bariéry  $U$  a ceny podkladového aktiva v okamžiku ukončení existence knock-out opce,  $S_{out}$ . U opce se spojitě sledovanou bariérou (dále spojitá bariéra) je zřejmé, že tato opce přestane existovat právě v okamžiku dosažení bariéry. Označíme-li tedy  $Pr(g)$  jako pravděpodobnost, že nastane jev  $g$ , pak  $Pr(S_{out} = U) = 1$ . Jiná situace nastává, je-li cena podkladového aktiva, resp. její vztah vůči bariéře, sledována (monitorována)

## GRAF 2 Opce s diskretní bariérou

Vývoj ceny podkladového aktiva je zachycen vzhledem ke třem knock-out datům,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ . Knock-out kupní opce s horní bariérou  $U$  v intervalu mezi daty  $t_1$  a  $t_2$  – cena podkladového aktiva sice přesáhla bariéru, ale opce nadále existuje. Přestává existovat až k datu  $t_3$ , cena  $S$  leží nad bariérou.



v diskretních okamžicích (dále diskretní bariéra), tj. denně, týdně, u dlouhodobějších opcí případně i měsíčně (obvykle se používají vybrané uzavírací ceny, *close prices*). Tyto okamžiky budou v dalším textu označovány jako **data knock-out**.

V případě opcí s diskretní bariérou je tedy velmi pravděpodobné, že spotová cena bude v okamžiku, ke kterému opce knock-out přestane existovat, vyšší, případně i nižší, ale pravděpodobně ne stejná jako bariéra,  $Pr(S_{out} \neq U) \rightarrow 1$ . Je tomu tak proto, že pro další existenci opce není důležité skutečné dosažení bariéry, ale to, jaká bude situace právě k datu knock-out. Je-li cena podkladového aktiva k tomuto datu nižší než bariéra, může opce dále existovat. Je-li však spotová cena vyšší než bariéra nebo jí rovna, pak opce existovat přestává. Tato skutečnost bude mít významný vliv na konečný efekt replikační strategie.

Pro názornost je situace znázorněna pomocí grafu 2; horizontální osa představuje čas, přičemž jsou zvýrazněna tři data knock-out. Jak je zřejmé, křivka znázorňující vývoj ceny podkladového aktiva v čase protíná bariéru (směrem vzhůru) mezi daty  $t_1$  a  $t_2$ , avšak v daném okamžiku není jasné, zda cena zůstane nad bariérou až do data  $t_2$ , nebo ne. Z dalšího vývoje je zřejmé, že cena po náhlém výstupu zpětně klesá pod bariéru  $U$ . K rozhodnému datu  $t_1$  i  $t_2$  je tedy cena aktiva nižší než bariéra a opce může nadále existovat. Mezi daty  $t_2$  a  $t_3$  je situace odlišná. Cena přesahuje bariéru a zůstává v rozhodné oblasti až po okamžik  $t_3$ , opce přestává existovat, přičemž však spotová cena je výrazně vyšší než bariéra.

U analyticky vyjádřených oceňovacích formulí se obvykle předpokládá spojitá možnost dosažení bariéry. Cenu takovéto opce lze obecně získat určením očekávané výplaty opce v době zralosti diskontované příslušnou sazbou. Za předpokladu užití rizikově neutrálních pravděpodobností z množiny  $Q^3$  bude příslušnou sazbou bezriziková sazba  $r$ . Pro hodnotu kupní opce knock-out  $V^{up/out}$  pak platí, že:

$$V^{up/out} = e^{-r \cdot T} \cdot E^Q \left[ (S_T - X)^+ \cdot I_{\max_{s \in [0, T]} S_s < U} \right] \quad (2)$$

kde  $\tau$  představuje dobu do zralosti a  $I_A$  označuje indikátor,

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } A \text{ platí} \\ 0, & \text{pokud } A \text{ neplatí} \end{cases}$$

Řešení uvedeného vztahu je pro opce se spojitou bariérou, tj.  $s \in [0; T]$ , triviální (jedná se o určení diskontované střední hodnoty očekávané výplaty při aplikaci integrálů a distribuční funkce sdruženého normálního rozdělení). Naopak, jedná-li se o opci s diskrétní bariérou, tj.  $s \in [t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = T]$ , je řešení složitější. Buď lze využít simulačních metod, nebo lze s cílem užít analytické řešení bariéru uměle zvýšit (Broadie – Glassermann – Kou, 1997).

V praxi jsou opce se spojitými (pseudospojitými) bariérami upřednostňovány především v souvislosti s úrokovými sazbami a měnovými kurzy. Je-li však podkladovým aktivem bariérové opce cena akcie či úroveň akciového indexu, je častější diskrétně sledovaný vztah spotová cena podkladového aktiva – bariéra.

### 3. Dynamická replikace

Základním předpokladem dynamické replikace hodnoty jakéhokoliv derivátu  $f$  je existence úplného trhu a obecně tedy možnost nalezení takového portfolia  $H(B, S)$ , které by v každém časovém okamžiku mělo stejnou hodnotu jako replikovaný derivát. U dynamické replikace lze rozlišit dva kroky. Jednak je třeba nalézt optimální výchozí kapitál  $H_0$  umožňující zahájit replikaci derivátu. Dále je nutné zvolit optimální replikační strategii  $\theta^{H_0}$  – při daném výchozím kapitálu  $H_0$  stanovení takových kombinací  $\theta_t = (x_t, y_t)$ , kde  $x_t$  představuje váhu bezrizikového aktiva  $B$  a  $y_t$  váhu rizikového aktiva  $S$  v portfoliu v čase  $t$ , aby pro všechna  $t$ ,  $t \in \langle 0, T \rangle$ , platilo, že:

$$f_t = H_t \quad \text{kde } H_t = x_t \cdot B_t + y_t \cdot S_t \quad (3)$$

Bude-li  $H_0$  minimální výchozí kapitál umožňující provádět optimální replikační strategii  $\theta^{H_0}$ , pak musí jeho hodnota za předpokladu dokonalých trhů odpovídat spravedlivé ceně (*fair price*) derivátu  $f$ :

$$f_0 = H_0 \quad (4)$$

Pro replikační portfolio  $H$  dále platí, že je samofinancovatelné. To znamená, že celková hodnota replikačního portfolia před úpravou kombinací aktiv v portfoliu,  $\theta_t = (x_t, y_t)$ , musí odpovídat hodnotě po úpravě, tedy při nové kombinaci  $\theta_{t+dt} = (x_{t+dt}, y_{t+dt})$ :

$$\begin{aligned} H_{t+dt} &= x_t \cdot B_{t+dt} + y_t \cdot S_{t+dt} = x_{t+dt} \cdot B_{t+dt} + y_{t+dt} \cdot S_{t+dt} \\ dH_t &= x_t \cdot dB_t + y_t \cdot dS_t \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>3</sup> Množinou  $Q$  se obecně označuje množina rizikově neutrálních (*martingale*) pravděpodobností ekvivalentních k množině reálných (tržních) pravděpodobností  $P$ . Jejich aplikací lze z v čase rostoucího stochastického procesu  $S_t$  diskontovaného bezrizikovou sazbou  $r$  učinit proces typu *martingale*, tj.  $E^Q [S_t \cdot e^{-r \cdot t}] = S_0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

Z toho vyplývá, že za předpokladu spojitě úpravy podílů aktiv v portfoliu lze konečnou hodnotu portfolia  $H_T$  zapsat takto:

$$H_t = H_0 + \int_0^T x_t \cdot dB_t + \int_0^T y_t \cdot dS_t \quad (6)$$

kde první část pravé strany rovnice představuje výchozí kapitál a integrály pak kumulovaný zisk (ztrátu) z replikační strategie  $\theta^{H_0}$ , tedy z držení daného množství zvolených aktiv v čase; jedná se o tzv. *gain process*. Za předpokladu dokonalých trhů a při užití optimální replikační strategie pak pro konečnou hodnotu replikačního portfolia platí:

$$f_T = H_T \quad (7)$$

### 3.1 Dynamická replikace a Blackův-Scholesův přístup

Při hledání optimální replikační strategie  $\theta^{H_0}$  lze vyjít z Lelanda a Rubinsteinova (1981), kteří upravili Blackovu-Scholesovu-Mertonovu parciální diferenciální rovnici.<sup>4</sup>

Předpokládáme-li rizikové aktivum  $S$  s přírůstkem:

$$dS = \mu \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dz \quad (8)$$

a jednodimenzionální derivát, který je závislý pouze na dynamice podkladového aktiva  $S$ , čase a jiných konstantních parametrech, lze přírůstek tohoto derivátu vyjádřit podle Itôovy formule následovně:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot (\mu \cdot dt + \sigma \cdot dz) \quad (9)$$

přičemž jediným neznámým a stochastickým prvkem v rovnicích (8) a (9) je specifický Wienerův proces  $dz$ . Je tedy zřejmé, že abstrahujeme-li od změny druhého řádu, lze přírůstek hodnoty derivátu  $df$  replikovat investováním podílu  $\frac{\partial f}{\partial S} = \Delta$  (delta) do rizikového aktiva  $S$  a rozdílu  $f - \Delta \cdot S$  do aktiva bezrizikového. A tedy:

$$H_t = x_t \cdot B_t + \Delta_t \cdot S_t \quad \text{přičemž } \Delta = \frac{\partial f}{\partial S}, \quad x_0 \cdot B_0 = f_0 - \Delta_0 \cdot S_0 \quad (10)$$

Pro replikaci jakéhokoliv derivátu pak platí:

$$f_t = H_t, \quad H_t = S_t \cdot \Delta_t - B_t \quad (11)$$

<sup>4</sup> Black a Scholes ve svém článku (1973) původně pouze zajišťovali opci přidáním vhodného množství podkladového aktiva. Uvedený postup lze označit jako tzv. *delta-hedging*. Leland a Rubinstein (1981) si posléze uvědomili, že postup lze obměnit a opci zcela synteticky vytvořit, replikovat. Zmíněná PDE je založena na vztahu (9); řešením po doplnění příslušných okrajových podmínek podle typu derivátu (*plain vanilla*, bariérová opce apod.) lze určit jeho cenu.

v případě dlouhé pozice a

$$-f_t = -H_t - H_t = -S_t \cdot \Delta_t + B_t \quad (12)$$

v případě krátké pozice. Poznamenejme, že hodnota levé i pravé strany rovnic (11) a (12) musí odpovídat hodnotě replikovaného derivátu pro všech  $t$ , tedy pozici v replikovaném aktivu po celou dobu životnosti.

Dosazením do (6) a (7) pak lze určit konečnou hodnotu derivátu:

$$f_t = x_0 \cdot B_0 + \Delta_0 \cdot S_0 + \int_0^T x_t \cdot dB_t + \int_0^T \Delta_t \cdot dS_t \quad (13)$$

Teoretický předpoklad, že se replikační (zajišťovací) portfolio  $H$  chová zcela totožně jako derivát  $f$ , je splněn pouze za předpokladu spojitě úpravy vah aktiv v portfoliu, tj.  $dt$  se blíží nule. Takto je vyžadováno prakticky nemožné – spojitě obchodování při nulových transakčních nákladech a nulovém *bid-ask spread*. V praxi však bývá upřednostňováno sledování aktiv a úprava vah v diskretních intervalech  $\Delta t$ ; v důsledku toho bude integrál ve vztahu (13) nahrazen sumou a rovnost pravé a levé strany bude platit jen v průměru. Očekávaná hodnota replikačního portfolia sice bude stále odpovídat hodnotě replikovaného aktiva, avšak výsledek se stane rizikovým. Velikost směrodatné odchylky pak bude podmíněna typem opce a charakterem podkladového procesu.

### 3.2 Využití replikačního portfolia při hedgingu

V případě, že cílem hledané strategie je vytvořit bezrizikový výnos z krátké rizikové pozice  $f$ , lze postupovat následovně. Pozici v derivátu je třeba doplnit vhodným množstvím  $\alpha$  jiného rizikového aktiva, např. aktiva podkladového  $S$ :

$$\text{bezriziková pozice } F = -f_0 + S_0 \cdot \alpha_0 \quad (14)$$

kde  $\alpha$  je v naprosté většině případů kladné. Jak je zřejmé z (10),  $\alpha \equiv \frac{\partial f}{\partial S}$ .

Jen takto lze vytvořit bezrizikový výnos. Je nutné si uvědomit, že nákup podkladového aktiva a udržování optimální pozice se musí financovat z určitých zdrojů (bezriziková zápůjčka, výpůjčka). To se projeví na výsledné pozici takto:

$$\text{celková pozice } F - x_0 \cdot B_0 = -f_0 + S_0 \cdot \Delta_0 - x_0 \cdot B_0 = -f_t + H_t = 0 \quad (15)$$

Výsledná celková pozice je tedy bezriziková a má nulovou hodnotu. Po všimněme si dále, že pro zajištění krátké pozice v derivátu je třeba užít portfolio, které replikuje dlouhou pozici v témže derivátu.

### 4. Statická replikace

Statické replikaci se mezi prvními věnovali obzvláště Derman *et al.* (Derman – Ergener – Kani, 1995), popisující numerický algoritmus s využitím



binomického modelu. Detailněji, převážně ve spojitém čase a v Blackově-Scholesově prostředí, se pak metodou zabírali Carr a Chou (1997), Carr *et al.* (Carr – Ellis – Gupta, 1998), Andersen *et al.* (Andersen – Andreasen – Eliezer, 2000) a Joshi (2001), který se zároveň pokusil rozlišit standardní replikační metody následovně.

**a) *strong static*:** výplata opce může být dokonale replikována sestavením konečného portfolia, v němž jsou obsaženy kupní i prodejní opce a podkladové aktivum, vytvořeného v jednom okamžiku, a to bez nutnosti dalších úprav podílů aktiv;

**b) *mezzo static*:** výplata opce může být dokonale replikována sestavením konečného portfolia, v němž jsou obsaženy kupní i prodejní opce, vytvořeného v jednom okamžiku a konečným počtem obchodů s podkladovým aktivem v časových okamžicích následujících;

**c) *weak static*:** výplata opce může být dokonale replikována sestavením konečného portfolia, v němž jsou obsaženy kupní i prodejní opce, které mohou být prodány před dobou realizace;

**d) *feeble static*:** výplata opce může být dokonale replikována pomocí konečného počtu obchodů s konečným počtem opcí;

**e) *dynamic*:** výplata opce může být dokonale replikována jen pomocí spojitého dynamického obchodování s podkladovým aktivem.

Smyslem statické replikace bariérových opcí může být – podobně jako v případě dynamické replikace – vytvoření takového portfolia  $\Pi$  z plain vanilla opcí s určitými splatnostmi a realizačními cenami, které by mělo po celou dobu své životnosti stejnou hodnotu<sup>5</sup> jako cílová knock-out či knock-in opce  $f$ , tedy:

$$\Pi_t = f_t, \quad t \in [0; T] \quad (16)$$

Jako vhodnější se však v tomto případě jeví pojetí replikace jako metody, která pomáhá vytvořit takové portfolio, jež replikuje „jen“ výplatu cílené opce  $f$  v době zralosti nebo její hodnotu na bariéře. Podle grafu 2 se jedná o část svislé přímky ( $T$ ) a příslušnou část vodorovné přímky ( $U$ ). Při dokonalé replikaci by však hodnota portfolia  $\Pi$  měla odpovídat hodnotě replikované opce i ve zvýrazněné oblasti (opce s dolní a horní bariérou  $L$  a  $U$ ), resp. včetně oblasti  $OTL$  (opce s horní bariérou  $U$ ).

V zásadě lze rozlišit dva základní přístupy k vytvoření statického replikačního portfolia. První metoda je označována podle autorů jako DEK (Derman – Ergener – Kani, 1995) a je založena na sestavení portfolia z relativně velkého počtu opcí s různou životností. Druhý přístup, podle autorů označovaný jako CEG (Carr – Ellis – Gupta, 1998), vyžaduje menší počet opcí se stejnou životností, avšak za předpokladu splnění určitých podmínek. Jedná se jednak o symetrickou volatilitu (*symmetric volatility smile*) a jednak o nulový přírůstek ceny podkladového aktiva (opce na forwardové ceny,

<sup>5</sup> V případě dynamické replikace tomu tak být musí. Portfolia, která mají stejnou počáteční i konečnou hodnotu, musejí mít za nemožnosti arbitráže stejnou hodnotu i po celou dobu své životnosti. Vliv hraje i předpoklad spojitého obchodování, nepředpokládaného statickým přístupem. Za předpokladu dokonalých, úplných trhů by však dokonale replikující statické portfolio mělo mít také totožnou hodnotu po celou dobu životnosti.

TABULKA 1 Statická replikace bariérové kupní opce a strategie v případě dosažení bariéry

portfolio	hodnota v případě dosažení bariéry	strategie v případě dosažení bariéry
$\Pi^0$	0	likvidace portfolia
$\Pi^i$	$V^{call}$	přeměna v plain vanilla kupní opci

aktiva s nulovými náklady držení, *cost of carry*, apod.). V takovémto případě lze postupovat podle pravidla „**put-call symetrie**“, jež spojuje hodnoty kupních a prodejních opcí se stejnými splatnostmi, avšak s různými realizačními cenami.

Dále uvedená definice replikace bariérové opce je zpravidla označována za „statickou“, přestože pro svou dokonalost (*perfect replication*) vyžaduje nekonečné množství aktiv v portfoliu. Rovněž se předpokládá jedna (konečná) úprava portfolia, a to v případě dosažení bariéry. Metoda je po určitých úpravách aplikovatelná i na replikaci jiných exotických opcí; jedná se například o opce **složené** (*compound options*), opce typu **lookback** (ty lze považovat za speciální případ komplexní bariérové opce) nebo **splátkové** (*installment options*).

#### 4.1 Statická replikace opce se spojitou bariérou

Předpokládejme nejdříve **statickou replikaci up-and-out kupní opce**  $V^{ut/out}(U, X, T)$  **se spojitou bariérou podle DEK**. Jedná-li se o opci evropského typu, tj. může-li být uplatněna jen v čase  $T$ , je zřejmé, že prvním krokem je nalezení takových opcí, které by replikovaly hodnotu  $f$  v době zralosti, tedy na tzv. **time boundary**, časové hranici. První aktivum, které je třeba zahrnout do replikačního portfolia  $\Pi^0$ , je běžná kupní opce  $V^{call}(X, T)$ . Tato opce bude mít požadovanou hodnotu v oblasti  $S \in [0, U) \times T$ , avšak již ne při  $S_T \geq U$ . Pro úspěšnost replikace postačuje, aby opce i portfolio  $\Pi^0$  měly stejnou hodnotu právě na bariéře, ne za ní. Tuto podmínku splňuje krátká pozice v jakékoliv opci se stejnou hodnotou jako  $V(X, T)$  na bariéře a s nulovou hodnotou pod bariérou (v čase  $T$ ). Může se jednat například o digitální opci  $V^{dig}(U, T)$  s realizační cenou odpovídající bariéře nebo o její aproximaci pomocí rozpětí vytvořeného z běžně obchodovatelných opcí.

Z vlastností bariérových opcí se pak odvíjí další postup replikace. To, zda bude opce v čase  $T$  uplatnitelná, či ne, závisí na (ne)dosažení bariéry po dobu životnosti. K opci  $V^{call}(X, T)$  již obsažené v portfoliu  $\Pi^0$  je třeba přidat potřebné množství jiných opcí nulujících jeho hodnotu na bariéře, přičemž je třeba postupovat zpětně od doby zralosti po čas nula. Portfolio je tedy v konečném důsledku spojitě bariéry nutné doplnit o příslušné jednoduché opce pro každý případný okamžik (tj. nekonečně mnoho okamžiků) dosažení bariéry.

Jak bylo uvedeno, tato strategie není zcela statická. Vyžaduje rovněž akci v případě dosažení bariéry (*tabulka 1*), a ne až v době zralosti. Portfolio  $\Pi^0$  replikující knock-out opci by mělo být v takovémto případě zlikvidováno; bylo by totiž jisté, že opce nebude moci být v čase  $T$  uplatněna. Je-li port-

folio  $\Pi^p$  dobře vybráno, měla by být tato likvidace možná při nulových nákladech a není tedy nutné, aby hodnota portfolia  $\Pi^p$  odpovídala hodnotě replikované opce i za bariérou. Naopak portfolio  $\Pi^i$  replikující knock-in opci (tj. podle parity  $\Pi^p$  méně běžná opce) by mělo být bezodkladně konvertováno do běžné opce, rovněž při nulových dodatečných nákladech.

Při replikaci prodejní opce je postup obdobný: nejdříve je nalezena standardní opce bez bariérové podmínky a následně je její hodnota na bariéře pomocí vhodných opcí vynulována.

## 4.2 Statická replikace opce s diskrétní bariérou

Má-li replikovaná opce **diskrétně pojatou bariéru**, je situace poněkud odlišná. Vzhledem k charakteru takovéto opce postačuje nulová hodnota replikačního portfolia  $\Pi$  pro konečný počet knock-out dat:

$$[\Pi^p, U] \times \{t_i\} = [0, U] \times \{t_1\} \cup [0, U] \times \{t_2\} \cup \dots \cup [0, U] \times \{T\} \quad (17)$$

kde  $[\Pi^p, U] \times \{t_i\}$  indikuje hodnotu portfolia v čase  $t_i$ , je-li spotová cena podkladového aktiva rovna úrovni bariéry. Portfolio  $\Pi^p$  je tedy opět možné replikovat pomocí standardní opce bez bariérových podmínek a konečného množství jiných opcí, jejichž hodnota odpovídá hodnotě cílené opce na bariéře k knock-out datu. Problém nastává – jak bylo uvedeno výše –, pokud je hodnota podkladového aktiva v čase  $t_i$  vyšší než bariéra (graf 2). Pak není možné dosáhnout strategie podle tabulky 1 při nulových nákladech. Jednou z možností je rozšíření podmínek replikace i pro vybraná  $S$  ležící nad  $U$ , přičemž vhodné úrovně lze stanovit na základě posouzení očekávané chyby a dostupného portfolia opcí. Je-li požadována dokonalá replikace, bude opět vyžadována pozice v nekonečném množství různých opcí, tj. s realizačními cenami odpovídajícími přípustným spotovým cenám podkladového aktiva v knock-out okamžiku. Je však třeba brát v úvahu, že není reálné, aby cena podkladového aktiva vzrostla mezi jednotlivými knock-out daty donekonečna či na jinou, dostatečně vysokou úroveň.

Druhý uvedený přístup (CEG) je rovněž zahajován nalezením vhodné opce replikující konečnou hodnotu replikovaného derivátu, tj. standardní opce bez bariérové podmínky. Její hodnota je následně na bariéře vynulována, a to s využitím *putt-call symetrie* (PCS). V závislosti na typu replikované opce a na základě PCS je portfolio třeba doplnit o jednu až nekonečně mnoho běžných opcí. Problémem mohou být pevné požadavky na úroveň realizační ceny, zpravidla dosti vzdálené úrovni aktuální spotové ceny.

Oba uvedené postupy lze aplikovat i pro replikace složitějších bariérových opcí, a to například při využití bariérové *put-call transformace* popsané Haugem (1998).

## 5. Chyba dynamické a statické replikace

Při praktickém naplnění obou strategií vyvstávají určité problémy. S dynamickou strategií je spojen především problém diskretizace – tedy ne-

možnost spojitého obchodování. Naopak se statickou replikací je spojen fakt, že opce potřebné pro vynulování hodnoty portfolia na bariéře (resp. nad bariérou) nejsou veřejně obchodovatelné, a tedy běžně dostupné. Pro oba studované typy bariéry (spojitá i diskretní bariéra) je opět nutná diskretizace, tj. sestavení portfolia pouze z konečného počtu opcí. Tato kapitola je blíže zaměřena na chybu replikace způsobenou diskretizací při výkonu obou strategií.

Jak vyplývá z definice výplatní funkce opce, maximální ztráta z krátké pozice v opci je buď neomezená (opce bez bariéry), nebo alespoň vyšší než její cena (veškeré opce). Právě proto by měla být efektivnost replikačních metod posuzována na replikaci krátké pozice. **Chyba replikace** bude takto odpovídat součtu hodnoty vystavené replikované opce a dlouhé pozice v replikačním portfoliu. Konkrétně pro knock-out kupní opci:

$$\text{chyba replikace}_T = -V_T^{up/out} + V_T^{call} - \sum V_T^{dig} \quad (18)$$

při využití statické replikace a

$$\text{chyba replikace}_T = -V_T^{up/out} + x_0 \cdot B_0 + \Delta_0 \cdot S_0 + \sum_{t=0}^T x_t \cdot \Delta B_t + \sum_{t=0}^T \Delta_t \cdot \Delta S_t \quad (19)$$

při využití dynamické replikace,

přičemž  $V_T^{up/out}$  bude: (a) nula v případě proražení bariéry, (b) v ostatních případech výplata v době zralosti.

K vlastnímu získání **konečné** replikační chyby není tedy třeba znát funkci pro určení hodnoty replikované opce. Jedná se o rozdíl mezi **výplatou opce** při ukončení životnosti a hodnotou replikačního portfolia. Znalost funkce či jiného způsobu pro určení hodnoty opce je však nutnou podmínkou pro prvotní sestavení replikačního portfolia při užití dynamické metody. Pro úpravu vah aktiv v portfoliu je pak nutné znát způsob určení citlivostních parametrů.<sup>6</sup>

Výše uvedené vztahy poskytují chybu replikace jako absolutní číslo. Pro srovnání opcí s různými parametry je možné vztáhnout tuto chybu k určité základně, nejlépe ceně opce. Použitelnost tohoto postupu však závisí na konkrétním typu opce. Vlastnosti některých bariérových opcí (vysoká pravděpodobnost dosažení bariéry) mohou způsobit, že se jejich hodnota bude blížit nule.

## 5.1 Chyba dynamické replikace

Předpokládejme krátkou pozici v knock-out kupní opci (tj. její vystavení) s realizační cenou  $X = 100$ , jejíž bariéra na úrovni  $U = 115$  je monitorována spojitě, s následujícími parametry: výchozí cena podkladového aktiva  $S = 100$  (jedná se o akcii bez dividendového výnosu s konstantním přírůst-

<sup>6</sup> Téměř kompletní přehled formulí pro určení hodnot opcí a příslušných citlivostních parametrů lze nalézt například v (Wystup, 2000).

TABULKA 2 Replikační charakteristiky dynamické replikace reverzní bariérové kupní opce

interval	min	max	šíkmost	špičatost	$Pr( ) = 0,05$	$Pr( ) = 0,1$
týden	-16,032	30,315	-1,048	10,592	-5,986	-3,623
den	-17,050	16,788	-2,236	22,411	-2,904	-1,638
12 hodin	-17,268	10,450	-3,602	36,304	-1,960	-1,103
6 hodin	-18,557	11,692	-4,213	56,457	-1,409	-0,823
1 hodina	-23,731	4,889	-12,903	389,078	-0,614	-0,344
interval	$\sigma$	mean	medián	$Pr(II > f)$	$Pr( ) = 0,95$	$Pr( ) = 0,9$
týden	2,902	-0,500	0,027	0,511	2,468	1,649
den	1,805	-0,307	-0,047	0,465	1,375	0,876
12 hodin	1,379	-0,228	-0,042	0,459	0,981	0,613
6 hodin	1,071	-0,171	-0,032	0,452	0,705	0,444
1 hodina	0,570	-0,073	-0,012	0,461	0,322	0,199

TABULKA 3 Replikační charakteristiky dynamické replikace kupní opce

interval	min	max	šíkmost	špičatost	$Pr( ) = 0,05$	$Pr( ) = 0,1$
týden	-8,696	3,618	-0,632	4,635	-2,375	-1,653
den	-4,009	2,456	-0,318	4,558	-1,097	-0,791
12 hodin	-3,076	2,066	-0,313	4,735	-0,793	-0,567
6 hodin	-1,918	1,701	-0,360	5,141	-0,569	-0,397
1 hodina	-0,795	0,624	-0,204	4,993	-0,225	-0,159
interval	$\sigma$	mean	medián	$Pr(II > f)$	$Pr( ) = 0,95$	$Pr( ) = 0,9$
týden	1,396	0,022	0,077	0,520	2,179	1,720
den	0,656	0,001	0,014	0,510	1,058	0,780
12 hodin	0,462	-0,009	0,010	0,510	0,710	0,535
6 hodin	0,331	-0,006	0,004	0,503	0,510	0,382
1 hodina	0,135	-0,002	0,000	0,501	0,211	0,155

kem  $\mu = 10 \%$  a volatilitou  $\sigma = 30 \%$ ), bezriziková sazba  $r = 5 \%$ , výchozí doba do zralosti je 25 obchodních dnů ( $T - 0 = \tau = 0,1$  roku).

*Tabulka 2* uvádí replikační charakteristiky studované bariérové opce při různých intervalech rebalancování portfolia (týdně, denně i hodinově). Konkrétně se jedná o krajní hodnoty replikační chyby (minimální a maximální), střední hodnotu (*mean*) a směrodatnou odchylku ( $\sigma$ ), parametry šířkosti a špičatosti a hodnoty kvantilů pro  $\alpha = 5 \%$ ,  $10 \%$ ,  $90 \%$  a  $95 \%$ . Pro možnost srovnání jsou tyto charakteristiky rovněž uvedeny pro běžnou kupní opci (*tabulka 3*). Chyby jsou v obou případech vyjádřeny absolutně nebo v procentech z výchozí ceny aktiva<sup>7</sup>. Je třeba si uvědomit, že jelikož je replikována krátká pozice, je záporná chyba určena přesahem výplaty replikované opce nad hodnotu replikačního portfolia.

Prezentované výsledky byly získány pomocí simulační metody Monte Carlo při 10 000 náhodných (pseudonáhodných) pokusech. Při výpočtech sice nebyly aplikovány poznatky techniky protikladné proměnné, avšak užitím generátoru pseudonáhodných čísel programu *Mathematica* bylo dosa-

<sup>7</sup> Pro lepší vzájemnou srovnatelnost lze vztáhnout chybu relativně k ceně dané opce, ve studovaném případě je cena bariérové opce přibližně 50 % oproti opci běžné.

ženo dosti přesných výsledků. Rovněž zvolený počet simulací (10 000) vedl v případě běžné opce k dosažení takřka nulové chyby (střední hodnoty replikační chyby), vliv na směrodatnou odchylku replikační chyby je pak při tomto počtu simulací obecně nižší.

Zatímco při replikaci běžné kupní opce lze dosáhnout relativně dobrého výsledku i pro denní interval, u vybrané bariérové opce je třeba jít až pod hodinový interval. I pak však zůstává vysoká pravděpodobnost extrémních (záporných) výsledků (*fat tails*). To je dáno nespojitostí opční výplaty. Ve všech případech je rovněž patrné výrazné negativní zešíkmení, které obdobně jako parametr špičatosti roste se zkracujícím se intervalem rebalancování portfolia.

Výrazně nenulová střední hodnota replikační chyby reverzní bariérové opce je dána aplikací diskrétního přístupu – de facto byla replikována opce s diskrétní bariérou, avšak výchozí portfolio bylo sestaveno pro opci se spojitou bariérou. Na základě podmínky nemožnosti arbitráže pak lze takto určenou chybu využít pro ocenění opce s diskrétní bariérou.

Mnohem horší výsledky dynamické replikace bariérové opce jsou způsobeny jejím charakterem. Jedná se o to, že tyto opce jsou v blízkosti bariéry sice v penězích (ITM), ale postačuje nepatrný vzrůst ceny podkladového aktiva a opce se stává bezcennou. To má vliv i na parametr  $\Delta$ . Zatímco  $\Delta$  běžné kupní opce se pohybuje v rozmezí 0 až 1, u bariérové opce takové omezení v podstatě neplatí.<sup>8</sup> V blízkosti bariéry je pak  $\Delta$  záporné – je vyžadována opačná pozice v podkladovém aktivu, neboť důsledkem zvýšení jeho ceny se opce může stát bezcennou. Vzhledem k nespojitosti výplatní funkce by to teoreticky znamenalo požadavek na takřka neomezenou krátkou pozici v podkladovém aktivu. Tento problém lze řešit pomocí replikací na bázi superreplikace při omezení krátké pozice v podkladovém aktivu (Schmock – Shreve – Wystup, 2002), i tak však při méně častém rebalancingu rebalancování zůstává chyba výrazná.

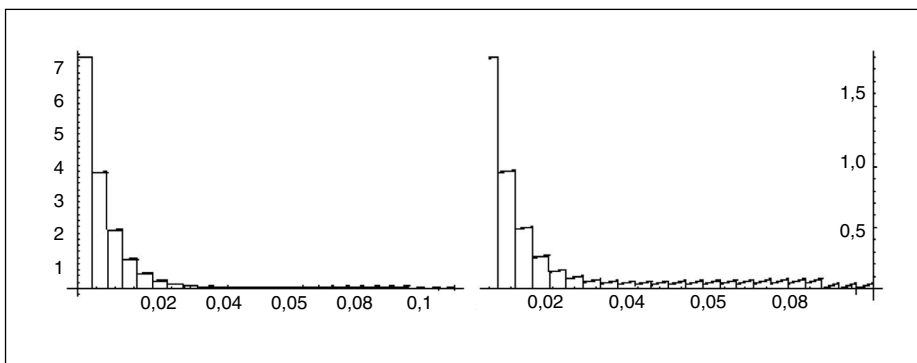
## 5.2 Chyba statické replikace

Dále uvažujeme **statickou replikaci** stejné opce podle modelu DEK, pro zjednodušení předpokládáme užití digitálních opcí. Cílem pro sestavení replikačního portfolia je dosáhnout stejné hodnoty, jako je hodnota replikované krátké pozice. Bude-li se jednat o opci se spojitou bariérou, nebude prakticky možné sestavit portfolio z požadovaného (nekonečného) počtu opcí. *Graf 3* ukazuje chybu způsobenou užitím konečného počtu opcí s životností po dnech. Přesný postup je zřejmý z části 4.1. Nulovou replikační chybu bude možné očekávat, jen pokud bude bariéry dosaženo právě v okamžiku zralosti jedné z digitálních opcí obsažených v portfoliu. Dojde-li však k dosažení bariéry v jiném okamžiku, bude chyba více či méně pozitivní a hodnota replikačního portfolia bude převyšovat teoretickou hodnotu opce.<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Vzhledem k nespojitosti opční výplaty (či funkce popisující její hodnotu) je získání přesné analytické formule pro parametr  $\Delta$  problematické. Užívané formule se za určitých okolností stávají nestabilními. Děje se tak především při extrémních hodnotách vstupních parametrů, nízké volatilitě, při výrazně nižší ceně podkladového aktiva vzhledem k  $X$ .

GRAF 3 Statická strategie replikace bariérové kupní opce se spojitou bariérou a chyba způsobená diskretizací (pro  $S = U$ )

Vertikální osa – doba do zralosti, horizontální osa – chyba v okamžiku proražení bariéry, vpravo – detail pro prvních 20 dnů replikace. Přesně v okamžiku zralosti užitých opcí je chyba nulová, již v bezprostředním okolí však chyba výrazně roste. Tento vliv je patrný obzvláště se zkracující se životností.



Hlavní problém spojený s využitím digitálních opcí a odhadem případné chyby je však následující: Hodnota digitální opce odpovídá pravděpodobnosti uplatnění, tj. dosažení realizační ceny v okamžiku zralosti, v uvedeném případě bariéry replikované opce. Z teoretického hlediska je tuto opci možné uplatnit jen tehdy, pokud je její  $\tau$  přesně rovno nule. Je-li jen mírně vyšší – řekněme, že do okamžiku uplatnění zbývá 10 minut – a spotová cena se rovná bariéře, je hodnota digitální opce blízká jedné polovině. Zdá se tedy, že je nutné počkat. Předpokládejme však, že se pozici nepodařilo ukončit přesně v okamžiku dosažení bariéry, ale až při ceně 116 jednotek. Takto hodnota digitální opce rázem vzroste o desítky procent a chyba replikace bude výrazně odlišná. Podobně lze předpokládat náhlý pokles ceny aktiva  $S$  zpět pod bariéru a s tím související ztrátu hodnoty digitální opce.

Připustíme-li uplatnění opce v průběhu obchodního dne, dojde k zúžení rozsahu chyby, ne však k jejímu celkovému odstranění, protože neodstraněn zůstal problém sladění hodnot běžné opce a ostatních digitálních opcí v portfoliu. To je způsobeno skutečností, že při sestavování portfolia byla brána v úvahu doba do zralosti v okamžiku předpokládaného proražení bariéry  $\tau = s$ , avšak ve skutečnosti se bude jednat o  $\tau = s + u$ . Poznamenejme, že u burzovně obchodovatelného aktiva (v rámci jednoho kontinentu) nelze předpokládat proražení bariéry mimo obchodování, tedy v průběhu noci, a relevantní časový interval se tak zkracuje.

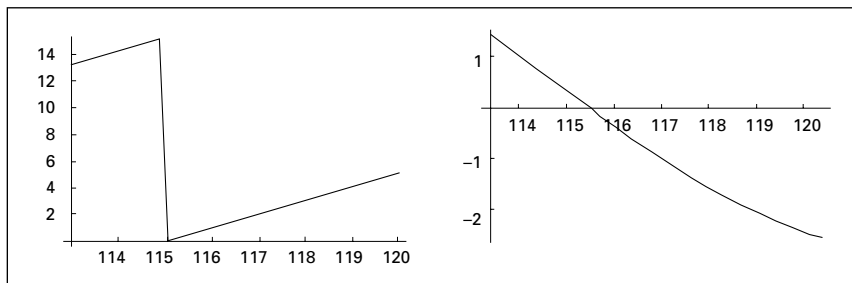
Výrazný vliv na hodnotu původně sladěného portfolia má také náhlá změna volatility podkladového aktiva.

Nyní se soustředíme na **statickou replikaci opce s diskrétní bariérou** (denní uzavírací ceny) jen na bariéře. Replikační portfolio je tedy sestaveno stejně jako v předchozím případě. Pro určení teoretické hodnoty opce je užita

<sup>9</sup> Je však nutné, aby  $S = U$ . Pokud se tak nestane, bude chyba obdobná jako u opce s diskrétní bariérou, viz dále.

GRAF 4 Statická strategie replikace bariérové kupní opce s diskrétní bariérou

Vertikální osa – cena podkladového aktiva, horizontální osa – chyba při likvidaci portfolia, vlevo – v době zralosti, vpravo – v polovině životnosti. Pro názornost je zachycena i hodnota portfolií před dosažením bariéry. Ve druhém případě odpovídá výplatě replikované opce.



metoda upravené bariéry. Takto je dosaženo mírně vyšší ceny než při bariéře spojitě. Očekávaná chyba pro různé úrovně ceny podkladového aktiva je zřejmá z grafu 4. Znázornění je možné využít i pro analýzu chyby při spojitě bariéře v případě neukončení pozice přesně v okamžiku dosažení bariéry.

Připomeňme, že replikační portfolio bylo sestaveno nejdříve z běžné opce  $V^{call}(100; 0,1)$  replikující výplatu vystavené bariérové opce  $V^{up/out}(100, 115; 0,1)$  v úseku 100 až 115 a následně doplněno digitálními opcemi  $\sum_{i=0}^{25} V^{dig}(115; 0,1 - i \cdot den)$  s požadavkem vynulovat hodnotu uvedené běžné opce v případě dosažení bariéry; zpravidla se tedy bude jednat o opačné pozice než v běžné opci. Strategie je opět zřejmá z části 2.2 a 4.2. Ke každému knock-out datu  $i$  je posouzen vztah spotové ceny  $S$  a bariéry  $U$ . Je-li  $S_i \geq U$ , je třeba ukončit pozici v replikačním portfoliu. Hodnota tohoto replikačního portfolia je zřejmá z grafu 4 jak v době zralosti, tak v polovině životnosti.

Chybu replikace vyjádřenou vztahem (18) lze v tomto případě upravit takto: **(a) časová hranice**, tj.  $\tau = 0$  a  $S < U$ , hodnota portfolia digitálních opcí je nulová a replikovaná bariérová opce je totožná s plain vanilla kupní opcí, z čehož vyplývá, že replikační chyba je rovna nule; **(b) hranice určená bariérou**, tj.  $S \geq U$ , replikovaná bariérová opce je bezcenná a chybu replikace lze vyjádřit jako rozdíl mezi plain vanilla kupní opcí a portfoliem digitálních opcí. Chybu lze tedy zapsat jako hodnotu portfolia  $\Pi$  replikujícího opačnou pozici, tj. replikační portfolio opatřené záporným znaménkem.

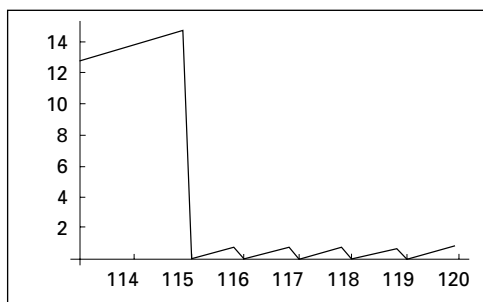
$$\text{chyba replikace} = + V^{call} - \sum V^{dig} \quad (20)$$

Ze znázornění v grafu 4 jsou dále zřetelné intervaly: V intervalu  $S_i \in (0, U)$  opce nadále existuje. V intervalu  $S_i \in [U, U + z]$  je chyba negativní, rozsah se však s blížící se zralostí opce mění. Pro velmi vysoké úrovně  $S$  by pak byla chyba pozitivní. V době zralosti pak podle grafu 4 bude křivka znázorňující replikační chybu nespojitá, což je odvislé od charakteru výplatních funkcí. V prvním intervalu je chyba nulová, druhý se zúžil na vlastní hodnotu  $U$ . I zde je chyba nulová. Třetí interval je ovlivňován přímou úměrou mezi hodnotou  $S$  a  $V^{call}(100; 0,1)$ , kdežto v portfoliu digitálních opcí je ak-



### GRAF 5 Rozšířená statická replikace bariérové kupní opce s diskretní bariérou

Vertikální osa – cena podkladového aktiva, horizontální osa – chyba při likvidaci portfolia; portfolio je sestaveno s cílem vynulovat hodnotu běžné opce pro  $S = 115, 116, 117, 118, 119$  a  $120$ .



tivní už jen jedna, s výplatou nezávislou na rozdílu  $S_T - U$ . Ze vztahu (20) je zřejmé, že chyba bude v této části kladná.

Lze učinit následující závěr: Nedojde-li v průběhu životnosti k proražení bariéry, bude chyba replikace nulová. Bude-li bariéra překročena v posledním možném okamžiku, bude chyba kladná. Totéž platí pro výrazné překročení v průběhu životnosti. Avšak přesáhne-li cena podkladového aktiva úroveň bariéry v průběhu životnosti jen mírně, bude chyba záporná. Výsledným efektem tedy bude spíše záporná očekávaná chyba replikace, a tudíž by statické replikační portfolio mělo mít mírně nižší hodnotu, než je odpovídající teoretická cena opce.

Při rozšíření replikace nejen na bariéru by graf 4 získal podobu „hřebene“. Tento efekt je patrný z grafu 5 pro okamžik zralosti. Replikační portfolio zde bylo sestaveno s požadavkem nulovat hodnotu běžné opce na bariéře s úrovní 115 jednotek až po úroveň 120 jednotek s jednotkovým intervalem. V případě aproximace digitálních opcí opcemi běžně obchodovatelnými bude přesný efekt nedokonalé replikace záviset na dostupných opcích, a tedy i přesnosti aproximace.

Jak již bylo zmíněno, chyba statické replikace je přímo závislá na pravděpodobnosti dosažení bariéry. Tato pravděpodobnost je reálná, tj. vychází ze skutečné dynamiky podkladového aktiva,  $\mu$ . Zatímco při klasickém oceňování opcí podle Blacka a Scholese (1973) postačuje znát rizikově neutrální dynamiku  $r$ , pro vyjádření replikační chyby je nutné pracovat s  $\mu$ . Teoretická cena odvozená za předpokladu dokonalé dynamické replikace je tedy spjata s rizikově neutrální pravděpodobností dosažení bariéry, kdežto chyba replikace, a to především statické, je významně spojena s reálnou pravděpodobností.

Z tabulky 4 jsou zřejmé replikační charakteristiky získané podle simulace pro bariéru sledovanou jak jednou za den, tak jednou za hodinu. V obou případech bylo replikační portfolio sestaveno z opcí se zralostí po dnech. Ve srovnání s tabulkou 3 je zřejmé výrazné omezení jak krajních hodnot chyby (zejména však té záporné), tak směrodatné odchylky. Medián je dán budoucí hodnotou počátečního rozdílu hodnot replikačního portfolia a uvažované hodnoty bariérové opce podle BS-modelu. Tato chyba bude dosažena za předpokladu, že nedojde k proražení bariéry.

TABULKA 4 Replikační charakteristiky statické replikace reverzní bariérové kupní opce

bariéra	min	max	šikmost	špičatost	$Pr( ) = 0,05$	$Pr( ) = 0,1$
den	-6,235	4,916	-4,268	26,574	-1,529	-0,479
hodina	-2,701	7,378	8,936	91,632	-0,285	-0,128
bariéra	$\sigma$	mean	medián	$Pr(H > f)$	$Pr( ) = 0,95$	$Pr( ) = 0,9$
den	0,704	-0,307	-0,128	0,006	-0,128	-0,128
hodina	0,642	-0,069	-0,128	0,015	-0,106	-0,128

Významný rozdíl mezi statickou a dynamickou strategií představuje rovněž počet potřebných obchodů a s tím související transakční náklady. Pro zakomponování transakčních nákladů by při zvolené strategii denního intervalu bylo třeba zvažovat následující: (a) s dynamickou metodou je ve zvoleném případě spojeno maximálně 26 obchodů s podkladovým aktivem (pro případ nedosažení bariéry v průběhu životnosti), nejvyšší náklady bývají zpravidla spojeny s počátečním sestavením portfolia; (b) statická strategie vyžaduje počáteční obchod s kupní opcí a nákup/prodej 25 různých digitálních opcí s případným ukončením pozice v okamžiku proražení bariéry. Dochází tedy k zajímavému rozdílu: čím je úroveň bariéry dosažena později, tím je při dynamické strategii nutných více obchodů, naopak digitální opce postupně platnost pozbývají, a tak není nutný jejich zpětný prodej/nákup.

Základní představu si však můžeme udělat na základě jednoduchého srovnání vstupních nákladů na rizikovou investici nutnou k sestavení replikačního portfolia. Zvolme opět ATM opci s bariérou ve výši 115 jednotek. Na základě hodnoty parametru  $\Delta$  bude hodnota počáteční rizikové pozice u dynamické strategie dosahovat téměř jedné třetiny ceny  $S_0$ . Oproti tomu u statické strategie bude absolutní součet pozic (tj. absolutní součet krátkých i dlouhých pozic v opcích obsažených v replikačním portfoliu) dosahovat stěží 4 %. I kdyby tedy byly s opcemi jakožto s rizikovějšími produkty spojeny v procentním vyjádření výrazně vyšší transakční náklady, bude konečný dopad na transakční náklady mnohem příznivější.

## 7. Závěr

Hlavním cílem článku bylo ukázat princip základních opčních replikačních metod bariérových opcí, konkrétně metodu dynamické replikace a statické replikace. Rovněž byla posouzena jejich efektivnost a charakter replikační chyby.

Výhodou bariérových opcí je oproti opcím klasickým nižší cena – vztahují se pouze k vybrané části rizika omezené bariérou (příp. bariérami) a realizační cenou. V souvislosti s oceňováním a hedgingem (replikací) těchto kontraktů však mohou vyvstat určité problémy způsobené specifičností opcí tohoto typu. V důsledku toho nelze při aplikaci standardní dynamické replikační metody očekávat uspokojivé výsledky. Vhodnou metodou může být statická replikace, je však třeba brát v úvahu praktickou nedostupnost potřebných aktiv, a tedy zvolit přijatelné zjednodušení při akceptaci zbytkového rizika na základě zvoleného kritéria (aplikaci užitkových funkcí, *mean-*

*variance hedging*) a/nebo toto zbytkové riziko dále řídit pomocí dynamického obchodování. Takto se lze částečně vypořádat i s problémem nekonstantní volatility.

Při výběru optimální metody a jejího charakteru (interval rebalancingu u metody dynamické, množství opcí u metody statické) je nutné zohlednit konkrétní podmínky. Jedná se zejména o likviditu podkladového aktiva (či jiného, dobře zkorelovaného), schopnost okamžitě reagovat na proražení bariéry, velikost transakčních nákladů, šíři dostupných opcí (životnost, realizační cena) apod. Při hedgingu bariérových opcí je také nutné brát v úvahu vzdálenost stanovené bariéry od výchozí ceny a dopad případných, nečíslných se vyskytujících, skoků. Stejně tak bude konečný efekt replikace vzhledem k nedokonalosti obou studovaných metod záviset na skutečné dynamice podkladového aktiva.

Velká výhoda statické replikace se projevila při zohlednění transakčních nákladů. Vzhledem k tomu, že tato metoda obvykle vyžaduje mnohonásobně menší rizikovou investici, lze předpokládat i výrazně nižší transakční náklady.

## LITERATURA

- ANDERSEN, L. – ANDREASEN, J. – ELIEZER, D. (2002): Static Replication of Barrier Options: Some General Results. *The Journal of Computational Finance*, vol. 5, no. 4, Summer 2002.
- BLACK, F. – SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, vol. 81, May-June 1973, pp. 637–659. Reprinted in: D. Luskin (Ed.): *Portfolio Insurance: A Guide to Dynamic Hedging*. John Wiley & Sons, New York, 1988.
- BROADIE, M. – GLASSERMAN, P. – KOU, S. (1997): A Continuity Correction for Discrete Barrier Options. *Mathematical Finance*, 1997, vol. 7, pp. 325–349.
- CARR, P. – ELLIS, K. – GUPTA, V. (1998): Static Hedging of Exotic Options. *Journal of Finance*, vol. 53, 1998.
- CARR, P. – CHOU, A. (1997): Hedging Complex Barrier Options. *Morgan Stanley and MIT Computer Science, Working Paper*, 1997.
- CVITANIĆ, J. – KARATZAS, I. (1993): Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios. *Annals of Applied Probability*, vol. 3, 1993, pp. 652–681.
- DERMAN, E. – ERGENER, D. – KANI, I. (1995): Static Options Replication. *Journal of Derivatives*, 1995, no. 2, pp. 78–95.
- HAUG, E. G. (1998): Barrier Put-Call Transformations. *Tempus Financial Engineering, Working paper*. Presented at the Danske Bank Symposium on Securities with Embedded Options, 1998.
- JOSHI, M. S. (2001): Pricing Discretely Sampled Path-dependent Exotic Options Using Replication Methods. *Quantitative Research Centre, Royal Bank of Scotland Group Risk, Working paper*, 2001.
- KARATZAS, I. – SHREVE, S. (1998): *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- LELAND, H. E. – RUBINSTEIN, M. (1981): Replicating Options with Positions in Stocks and Cash. *Financial Analysts Journal*, July-August 1981. Reprinted in: D. Luskin (Ed.): *Portfolio Insurance: A Guide to Dynamic Hedging*. John Wiley & Sons, New York, 1988.
- MUSIELA, M. – RUTKOWSKI, M. (1997): *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 1997.
- NEFTCI, S. N. (2000): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. New York, Academic Press, 2000.
- SCHMOCK, U. – SHREVE, S. – WYSTUP, U. (2002): Valuation of Exotic Options under Short-selling Constraints. *Finance and Stochastics*, vol. 6, 2002.

TICHÝ, T. (2003): Replication Methods of Contingent Claims with Barriers and Measuring its Effectiveness Via Simulation. *Documentos de Trabajo (Working Papers Collections)*, Departamento de Estadística, Econometría, Investigación Operativa y Organización de Empresas, Universidad de Córdoba, Spain, 2003. ISBN 84-95723-04-2.

TICHÝ, T. (2004): *The Efficiency of Option Replication Methods on a Data Set of Central European Stock Market*. In proceedings of "Third International Symposium on Business Administration: The Competitive Power of The European Union after The Enlargement", Çanakkale Onsekiz Mart University, Turkey, 2004.

WYSTUP, U. (2000). *The MathFinance Formula Catalogue*. <http://www.mathfinance.de>. [downloaded: 1. 2. 2002]

## SUMMARY

JEL Classification: G11, G13, G20; D81; C15, C61

Keywords: options – barrier options – replication methods – dynamic and static replication – replication error

## Replication Methods in the Pricing and Hedging of Barrier Options

Tomáš TICHÝ – Faculty of Economics, Technical University of Ostrava (Czech Republic)  
(tomas.tichy@vsb.cz)

This paper considers various options replication methods. Firstly, a specific type of barrier option, an up-and-out call, is considered. Other barrier options are briefly also described, and various types of barriers are considered. Secondly, a general definition of replication methods is provided. Two methods are thus examined in detail: The first one, based on ever-changing positions in replicating portfolio, is referred to as a dynamic replication method. The second one is denoted as a static replication method—its aim is to create a static basket of simple assets that will replicate the option payoff. However, in the real world it is difficult to attain perfect replication; therefore, the expected replication error of both methods is studied via simulation technique.